**ENSAE 2016/2017**

# Correction de l'examen de Théorie du Risque

**Exercice 1 - Modèle collectif en réassurance (6 pt).**

1. Méthode 1. Dans le cours, on a
$$\mathbb{E}(\min(X_k, P)) = \int_0^P (1 - F_X(x))dx$$
De plus on remarque que $X = \min(X_k, P) + (X_k - P)_+$, d'où le résultat grâce à la positivité et au caractère $L^1$.
Méthode 2. On utilise Fubini de la même manière qu'on démontre que $\mathbb{E}(\min(X_k, P)) = \int_0^P (1 - F_X(x))dx$ et en déduire directement le résultat : dans ce cas on n'a pas besoin de la positivité, ni de l'intégrabilité.
Méthode 3. Comme $(X_k - P)_+ \geq 0$,
$$\mathbb{E}[(X_k - P)_+] = \int_{\mathbb{R}_+} (1 - F_{(X-P)_+}(x))dx.$$
De plus, pour $x \geq 0$,
$$F_{(X-P)_+}(x) = \mathbb{P}((X_k - P)_+ \leq x) = \mathbb{P}(X_k \leq x + P) = F_X(x + P),$$
d'où
$$\mathbb{E}[(X_k - P)_+] = \int_{\mathbb{R}_+} (1 - F_X(x + P))dx = \int_P^{+\infty} (1 - F_X(x))dx.$$
2. C'est une application directe du cours des formules de Wald en remarquant que $\mathbb{E}(N) = Var(N) = \lambda$.
3. Voir cours
4. Voir cours

**Exercice 2 - Dominance stochastique (2 pt).** Soit $u$ une fonction convexe et croissante.

Méthode 1. En utilisant l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles :
$$\mathbb{E}[u(X + Z)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[u(X + Z) \mid X]] \geq \mathbb{E}[u(\mathbb{E}[X + Z \mid X])] = \mathbb{E}(u(X)).$$
Méthode 2. Par indépendance de $X$ et de $Y$, puis par l'inégalité de Jensen,
$$\mathbb{E}[u(X+Z)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x+z)d\mathbb{P}_Z(z)d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[u(x+Z)]d\mathbb{P}_X(x) \geq \int_{\mathbb{R}} u(x+\mathbb{E}[Z])d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x)d\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}(u(X)).$$

**Exercice 3 - Théorie de la ruine (5 pt).**

1. On vérifie la définition. On remarque que $N'_0 = N_0 = 0$ p.s., que $t \mapsto N_{t'}$ est càdlàg p.s. car $t \mapsto N_t$ l'est et $t \mapsto \lambda t$ est continue, que $N'_t - N'_s = N_{\lambda t} - N_{\lambda s}$ qui est indépendante de $\mathcal{F}_{\lambda s} = \mathcal{F}'_s$ car $N$ est un processus de Poisson et, enfin, que $N'_t - N'_s = N_{\lambda t} - N_{\lambda s} \sim \mathcal{P}(\lambda t - \lambda s) = \mathcal{P}(\lambda(t - s))$.
2. On remarque que :
$$\{\exists t \geq 0 : U_t < 0\} = \{\exists t \geq 0 : U_{\varphi(t)} < 0\},$$
car $\varphi$ est surjective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On en déduit $\psi'(u) = \psi(u)$.
3. On remarque que, pour $\lambda > 0$,
$$U_t = (1 + \beta)\mu\lambda t - \sum_{k=1}^{N_t} X_k \overset{loi}{=} (1 + \beta)\mu(\lambda t) - \sum_{k=1}^{\bar{N}_{\lambda t}} X_k = \bar{U}(\lambda t),$$
où $\bar{N}$ est un processus de Poisson de paramètre 1, c'est-à-dire que $U$ est un changement de temps d'un $\bar{U}$ de paramètre 1. De plus, $t \mapsto \lambda t$ vérifie les conditions de $\varphi$. On en déduit que $\psi(u)$ est indépendant de $\lambda$.
4. Dans ce cas là, la propriété ne marche plus, car l'application $t \mapsto \lambda t$ transforme l'intervalle $[0, T]$ en $[0, \lambda T]$. On peut également deviner que la probabilité de ruine sur $[0, T]$, lorsque $\lambda \to +\infty$, convergera vers $\psi(u)$.

**Exercice 4 - Un cas de sous-additivité des *VaR* (3 pt).** Puisque si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X_i := \mu_i + \sigma_i Z \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, on en déduit que

$$VaR(X_i, \alpha) = \mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(\alpha).$$

De plus, comme $X$ est un vecteur gaussien, $X_i + X_j$ suit une loi normale. On a

$$\mathbb{E}(X_i + X_j) = \mu_i + \mu_j,$$
$$Var(X_i + X_j) = Var(X_i) + Var(X_j) + 2Cov(X_i, X_j) = \sigma_i^2 + \sigma_j^2 + 2\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j \leq \sigma_i^2 + \sigma_j^2 + 2\sigma_i\sigma_j \leq (\sigma_i + \sigma_j)^2.$$

On en déduit

$$VaR(X_i + X_j, \alpha) = \mu_i + \mu_j + \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2 + 2\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j}\,\Phi^{-1}(\alpha) \leq \mu_i + \mu_j + (\sigma_i + \sigma_j)\Phi^{-1}(\alpha) = VaR(X_i, \alpha) + VaR(X_j, \alpha)$$

**Exercice 5 - Sinistres au-dessus d'un seuil (4 pt).**

1. Méthode 1. On remarque que $Y_2 \mid \{N_1 = n\}$ suit une loi binomiale de paramètre $(n, p)$. Soit $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1 - Y_2 = k) &= \mathbb{P}\left(N_1 - Y_2 = k \cap \bigcup_{n\geq 0}\{N_1 = n\}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(N_1 - Y_2 = k \cap N_1 = n) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(N_1 - Y_2 = k \mid N_1 = n)\,\mathbb{P}(N_1 = n) \\
&= \sum_{n\geq k} \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^k \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda_1}}{k!}(1-p)^k \sum_{n\geq k} \frac{\lambda_1^n p^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda_1}}{k!}(1-p)^k \lambda_1^k \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda_1^n p^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda_1(1-p)}}{k!}[\lambda_1(1-p)]^k.
\end{aligned}$$

   Méthode 2. On remarque que $Y_2$ peut s'écrire

$$Y_2 = \sum_{k=1}^{N_1} Z_k,$$

   où les $(Z_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p$. On a alors

$$N_1 - Y_2 = \sum_{k=1}^{N_1}(1 - Z_k),$$

   où $1 - Z_k \sim \mathcal{B}(p)$. On reconnait un modèle collectif avec des sommes de variables aléatoires de Bernoulli, comme dans l'exercice 1. On en déduit de la même manière que $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1(1-p))$.

   Enfin, la somme de deux lois de Poisson indépendantes est une loi de Poisson dont le paramètre est la somme des paramères, on en déduit :

$$N \sim \mathcal{P}(\lambda_1(1-p) + \lambda_2).$$

2. On utilise le résultat du cours dans le cas de l'agrégation de deux sommes aléatoires de loi de Poisson. On agrege celle de première période avec celle de deuxième période, la loi des $A_k$ est la loi mélange $q\mathbb{P}_1 + (1-q)\mathbb{P}_2$ où $q = \frac{(1-p)\lambda_1}{(1-p)\lambda_1 + \lambda_2}$.