Examen 2025-2026

Correction
Mathématiques de l'assurance dommages : théorie et pratique

Exercice 1 - Modèles linéaires généralisés

1. Il faut et il suffit que la fonction T soit la fonction identité (dans ce cas $A = B$).
2. Soit g une fonction continue bornée,

$$\mathbb{E}[g(Z)] = \int_A g(T(y))f(y,\theta,\phi)dy.$$

On effectue le changement de variable $z = T(y) \Leftrightarrow y = T^{-1}(y)$, $dz = |T'(y)|dy \Leftrightarrow dy = |T'(T^{-1}(z))|dz$,

$$\mathbb{E}[g(Z)] = \int_B g(z)e^{\frac{z\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(T^{-1}(z),\phi) - \log|T'(T^{-1}(z))|}dz.$$

Les fonction a et b sont inchangées et la nouvelle fonction c est $z \mapsto c(T^{-1}(z),\phi) - \log|T'(T^{-1}(z))|$.

3. Si $T = \log$ alors $T^{-1} = \exp$ qui est une fonction strictement convexe. Et donc (en dehors du cas dégénéré où Z est constante), par l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles :

$$\widehat{E[Y \mid X]} = \exp\left(\mathbb{E}[Z \mid X]\right) < \mathbb{E}\left[\exp(Z) \mid X\right] = \mathbb{E}\left[Y \mid X\right].$$

L'estimateur est biaisé, il sous-estime systématiquement.

4. Comme Y suit une loi log-normale, on connait son espérance (qui est aussi donnée par la fonction génératrice de la loi normale)

$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \exp\left(\beta_0 + X\beta + \frac{a(\phi)}{2}\right) = \exp\left(\mathbb{E}\left[Z \mid X\right] + \frac{a(\phi)}{2}\right).$$

Cette fois-ci l'estimateur est sans biais.

Exercice 2 - Tarification a posteriori

1. Θ_i représente les variables explicatives inobservées de l'assuré i.
2. Voir cours.
3. Voir cours.
4. Par construction, le modèle linéaire généralisé estime la quantité $\mathbb{E}\left[N_i \mid X_i = x_i\right]$, en conséquence :

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[N_i \mid X_i = x_i\right] = \widehat{P}_i^N.$$

Dans le modèle de Poisson surdispersé, la fonction de variance est $V : \mu \mapsto \phi\mu$, on en déduit

$$\widehat{Var}\left[N_i \mid X_i = x_i\right] = \widehat{\phi}\widehat{P}_i^N.$$

Exercice 3 - Provisionnement

1. Voir cours.
2. Voir cours.
3. L'estimateur $\widehat{f}_j^n$ est sans biais conditionnellement à $\mathcal{B}_j^n$ et

$$Var\left(\widehat{f}_j^n \mid \mathcal{B}_j^n\right) \overset{H1}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n-j} Var\left(C_{i,j+1} \mid \mathcal{B}_j^n\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}\right)} \overset{H3}{=} \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   ce qui démontre que le résultat.
4. On a, pour $i \geq 2$,

$$\begin{aligned} Var\left(\frac{\varepsilon_{i,j}}{\sum_{k=1}^{i} C_{k,j}} \,\middle|\, \mathcal{B}_j^n\right) &\overset{H3}{=} \frac{\sigma_j^2 C_{i,j}}{\left(\sum_{k=1}^{i} C_{k,j}\right)^2} \\ &\leq \frac{\sigma_j^2 C_{i,j}}{\left(\sum_{k=1}^{i-1} C_{k,j}\right)\left(\sum_{k=1}^{i} C_{k,j}\right)} \\ &= \sigma_j^2\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{i-1} C_{k,j}} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{i} C_{k,j}}\right) \end{aligned}$$

   Puis, on remarque que la série associée est télescopique,

$$\sum_{i=2}^{n-j} Var\left(\frac{\varepsilon_{i,j}}{\sum_{k=1}^{i} C_{k,j}} \,\middle|\, \mathcal{B}_j^n\right) \leq \sigma_j^2\left(\frac{1}{C_{1,j}} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sigma_j^2}{C_{1,j}} < \infty.$$

   D'où le résultat, par le théorème des deux séries de Kolmogorov.
5. Pour $i \geq 1$, On pose

$$b_i := \sum_{k=1}^{i} C_{k,j}, \quad u_i := \frac{\varepsilon_{i,j}}{\sum_{k=1}^{i} C_{k,j}}.$$

   et on remarque que $b_i u_i = \varepsilon_{i,j}$. D'où

$$\frac{1}{b_{n-j}} \sum_{i=1}^{n-j} u_i b_i = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} \varepsilon_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}},$$

   puis, par le lemme de Kronecker, on en déduit le résultat. En conclusion

$$\widehat{f}_j^n \mid \mathcal{B}_j^n \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} f_j.$$