ENSAE 2022/2023

Correction de l'examen d'actuariat de l'assurance non-vie

Exercice 1 - Modèles linéaires généralisés.

1. Cours : $f_Y(y) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)\right)$.
2. On sait par le cours que si $Y \sim \mathbb{P}_\theta$, $Var(Y) = a(\phi)b''(\theta)$. Comme la variance est positive ainsi que $a(\phi)$, b'' est positive donc b est convexe.
3. $$\ell((y_i)_{1\leq i\leq n}, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i x_i'\beta - b(x_i\beta))}{a(\phi)} + c(y_i, \phi) \propto \sum_{i=1}^{n} (y_i x_i'\beta - b(x_i'\beta)).$$
4. Soit $1 \leq j \leq d$,
$$\nabla\bar{\ell}(\beta)_j = \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i)_j - (x_i)_j b'(x_i'\beta),$$
c'est à dire
$$\nabla\bar{\ell}(\beta) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - x_i b'(x_i'\beta),$$
Puis, pour tout $1 \leq j, j' \leq d$,
$$\nabla^2\bar{\ell}(\beta)_{j,j'} = \sum_{i=1}^{n} -(x_i)_j(x_i)_{j'} b''(x_i'\beta),$$
c'est-à-dire
$$\nabla^2\bar{\ell}(\beta) = \sum_{i=1}^{n} -x_i x_i' b''(x_i'\beta).$$
5. Comme $b'' > 0$, et les $x_i x_i'$ sont des matrices définies positives, $\nabla^2\bar{\ell}(\beta)$ est définie positive sur tout le domaine. La fonction $\bar{\ell}$ est donc strictement concave ce qui implique le résultat.

Exercice 2 - Tarification a posteriori

1. Soit $(z_t^i)_{t\geq 0}$ un processus à valeurs dans [0, 1]. La forme générale du nombre de sinsitres attendu est
$$(1 - z_t^i)\mathbb{E}_{x_i}(N_1^i) + z_t^i \frac{N_t^i}{t}.$$
2. En $t = 0$, nous n'avons aucune obervation de la sinistralité réelle, z_0^i doit être égale à 0. Lorsque $t \to +\infty$, par la loi des grands nombres $\frac{N_t^i}{t} \to \mathbb{E}_{x_i}(N_1^i \mid \Theta)$ *p.s.* qui est la prime pure en observation complète. On doit avoir $z_t^i \to 1$.
3. $$\mathbb{E}_{x_i}(N_1^i) = \mathbb{E}_{x_i}\left[\mathbb{E}_{x_i}(N_1^i \mid \Theta_i)\right] = \mathbb{E}_{x_i}\left[P(\Theta_i)\right].$$
4. En suivant le cours on aboutit à
$$a^\star = \mathbb{E}_{x_i}\left[P\left(\Theta_i\right)\right] - b^\star \mathbb{E}_{x_i}\left[\frac{N_t^i}{t}\right],$$
$$b^\star = \frac{Cov_{x_i}\left[\frac{N_t^i}{t}, P\left(\Theta_i\right)\right]}{Var_{x_i}\left(\frac{N_t^i}{t}\right)}.$$

Puisque $Cov_{x_i}\left(\frac{N_t^i}{t}, P(\Theta_i)\right) = Var_{x_i}\left[P(\Theta_i)\right]$, on en déduit

$$b^\star = \frac{Var_{x_i}\left[P(\Theta_i)\right]}{Var_{x_i}\left(\frac{N_t^i}{t}\right)}.$$

On en déduit comme dans le cours

$$P_t^{i,\star} = a^\star + b^\star \frac{N_t^i}{t} = (1-b^\star)\mathbb{E}_{x_i}\left[P\left(\Theta_i\right)\right] + b^\star \frac{N_t^i}{t}.$$

5. Nous avons par définition $Var_{x_i}\left[P(\Theta_i)\right] = Var_{x_i}\left[\mathbb{E}_{x_i}(N_1 \mid \Theta_i)\right] = Var_{x_i}(\Theta)$. Or, par la formule de variance totale et comme $\mathbb{E}_{x_i}\left[\Theta_i\right] = \mathbb{E}_{x_i}\left[N_1^i\right]$,

$$\begin{aligned} & Var_{x_i}(N_1^i) = \mathbb{E}_{x_i}\left[Var_{x_i}(N_1^i \mid \Theta_i)\right] + Var_{x_i}\left[\mathbb{E}_{x_i}(N_1^i \mid \Theta_i)\right] \\ \iff & Var_{x_i}(N_1^i) = \mathbb{E}_{x_i}\left[\Theta_i\right] + Var_{x_i}\left[\mathbb{E}_{x_i}(N_1^i \mid \Theta_i)\right] \\ \iff & \phi\lambda(x_i) = \lambda(x_i) + Var_{x_i}\left[\mathbb{E}_{x_i}(N_1^i \mid \Theta_i)\right] \end{aligned}$$

On en déduit $Var_{x_i}[P(\Theta_i)] = Var_{x_i}\left[\mathbb{E}_{x_i}(N_1 \mid \Theta_i)\right] = (\phi-1)\lambda(x_i)$, puis pour le dénominateur de $b^\star$

$$\begin{aligned} Var_{x_i}\left(\frac{N_t^i}{t}\right) &= \mathbb{E}_{x_i}\left[Var_{x_i}\left(\frac{N_t^i}{t} \mid \Theta_i\right)\right] + Var_{x_i}\left[\mathbb{E}_{x_i}\left(\frac{N_t^i}{t} \mid \Theta_i\right)\right] \\ &= \frac{\mathbb{E}_{x_i}\left[Var_{x_i}\left(N_t^i \mid \Theta_i\right)\right]}{t^2} + Var_{x_i}\left[\Theta_i\right] \\ &= \frac{\mathbb{E}_{x_i}\left[\Theta_i\right]}{t} + (\phi-1)\lambda(x_i) = \lambda(x_i)\left[\frac{1}{t} + (\phi-1)\right] \end{aligned}$$

et

$$b^\star = \frac{(\phi-1)\lambda(x_i)}{\lambda(x_i)\left[\frac{1}{t} + (\phi-1)\right]} = \frac{\phi-1}{\frac{1}{t} + (\phi-1)}$$

$$P_i^\star = (1-b^\star)\mathbb{E}_{x_i}\left[P\left(\Theta_i\right)\right] + b^\star \frac{N_t^i}{t} = (1-b^\star)\lambda(x_i) + b^\star \frac{N_t^i}{t}.$$

Il suffit de poser $z_t^i = b^\star$ pour tout $t \geq 0$, qui est indépendant de i.

Exercice 3 - Provisionnement

1. Voir cours.
2. On a que
   - $\mathbb{E}(\widehat{f}_j \mid \mathcal{B}_j) = f_j$ et
   - $\widehat{f}_j$ est $\mathcal{B}_k-$mesurable pour $j < k$,

   c'est donc la même démonstration que dans le cours.
3. On sait que le poids optimal est de la forme

   $$p_{i,j} \propto \frac{1}{Var(\widehat{f}_{i,j})}.$$

   Puisque

   $$Var(\widehat{f}_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2 C_{i,j}^\alpha}{C_{i,j}^2} = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}^{2-\alpha}},$$

   on en déduit

   $$p_{i,j} \propto C_{i,j}^{2-\alpha}.$$
4. Puisque la propriété d'absence de correlation entre les $\widehat{f}_j$ du cours est aussi vérifiée ici, c'est la même démonstration.
5. Erreur d'estimation des paramètres et erreur lié à l'aléa intrinsèque du processus aléatoire.
6. La méthode du bootstrap.